

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ СПЕКТРОВ И АППРОКСИМАЦИЯ КОРОТКИХ ПРОЦЕССОВ, СИГНАЛОВ, ФУНКЦИЙ

Дмитриев Е.В. kvjsj3903@yandex.ru

Почему считается, что спектр отрезка функции  $\sin(2\pi f t)$  содержит иное, но не гармонику с частотой  $f$ ? В статье вводится в рассмотрение новая качественная характеристика коротких процессов - спектр, состоящий из конечного оптимального набора не обязательно ортогональных гармонических составляющих. Описываются свойства спектра. Сделаны выводы о возможности разложения коротких дискретных и непрерывных процессов в конечные гармонические ряды. Предлагаются способы определения нового спектра. Излагаются методы эффективной аппроксимации коротких процессов, используемые при расчете нового спектра.

В настоящее время способы определения спектра процессов и отдельных сигналов основаны на использовании их разложений в ряды или представлении интегралами Фурье с применением базисных ортогональных функций. Однако эти способы вместе с их модификациями не всегда эффективны при анализе *коротких сигналов* (имеющих конечную длительность), в том числе фрагментов процессов. Главным является то, что в них *искусственно навязывается поведение сигнала на концах и вне интервала* (в том числе разрывы первого рода сигнала и его производной), что отрицательно сказывается на показателях, характеризующих колебательные свойства сигнала. Рассмотрим фрагмент реализации стационарного непрерывного процесса. Рассчитаем его спектр, используя интегральное преобразование Фурье. В таком спектре не отображаются корреляционные свойства процесса, что не позволяет использовать его, например, для экстраполяции. Аналогичное имеет место и для дискретных (по времени) процессов. Далее, спектры на основе разложений Фурье обладают значительной избыточностью (по количеству гармоник). В результате имеем: традиционный спектр короткого аналогового процесса, состоящего из нескольких гармоник, не является линейчатым, что не соответствует реальности. *Под гармоникой* в данной статье понимается *любая синусоидальная составляющая* процесса.

Поэтому, в настоящее время актуально для практических приложений применение иного, более эффективного способа описания колебательных свойств процесса *внутри временного интервала*. С этой целью введем в рассмотрение *новый тип спектра* и предложим алгоритмы его расчета.

Поставим и решим следующую оптимизационную задачу. *Определить минимальное количество  $K$  гармоник не обязательно ортогональных, в сумме образующих (с заданной точностью) внутри временного интервала  $[0, T]$  короткий процесс – дискретный по времени -  $x[n]$ , или непрерывный -  $x(t)$ , а также рассчитать значения*

$$A_0, (A_1, B_1, \omega_1), \dots, (A_K, B_K, \omega_K) \quad (1)$$

*параметров этих гармоник – частоты и амплитуды. Здесь  $A_0$  - постоянная составляющая. При этом поведение суммы вне интервала ничем не должно быть ограничено.*

Найденный в результате решения набор (1) будем считать искомым спектром. В отличие от спектров на основе разложений Фурье назовем его *естественным гармоническим спектром (Е-спектром) короткого процесса*. В полярных координатах параметрами спектра будут  $\{\omega_k, R_k, \varphi_k\}$ . Отмеченные выше недостатки (являющиеся свойствами спектра Фурье) и ряд других у нового спектра отсутствуют.

Изложенная формулировка задачи является с одной стороны задачей определения Е-спектра, а с другой – задачей аппроксимации короткого процесса функцией

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t). \quad (2)$$

Данная статья посвящена разработке и исследованию методов решения обеих задач. Рассматриваемые процессы – действительные функции. Предлагаемая здесь методика может быть применена независимо от того, является ли исследуемый процесс по своей природе суммой колебаний или нет. Анализируемый процесс может являться полезным сигналом без, либо с наложенной помехой.

В качестве ошибки аппроксимации возьмем выражения

$$S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt, \quad S^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{x[n] - y[n]\}^2, \quad (3)$$

если рассматриваемый процесс непрерывный и дискретный соответственно, где

$$y[n] = A_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos \omega_k nT/N + B_k \sin \omega_k nT/N). \quad (4)$$

Здесь  $y[n]=y(n\Delta t)$ ;  $\Delta t=T/N$ ;  $N$ - число отсчетов процесса.

Амплитуды и частоты спектра будем определять минимизацией ошибки  $S$ , как целевой функции, по параметрам (1). Результат решения будет различным в зависимости от количества  $K$  используемых гармоник. Поэтому задача должна решаться с учетом выполнения дополнительного условия, связывающего параметр  $K$  с величиной допустимой ошибки  $S$ . В одном случае это достижение минимума  $K$  при заданной или нулевой ошибке  $S$ . В другом - достижение минимума ошибки при заданном  $K$ . Главным показателем является величина  $K$  при фиксированных  $N$  и  $S$ . Чем ошибка меньше, тем ближе рассчитанный спектр к реальному.

Далее вводятся в рассмотрение некоторые новые понятия и определения для процессов и их спектров. Предлагается общий метод расчета спектров, а также *статистический параллельный, аналитический параллельный и статистический последовательный*. Даются характеристики предложенных методов аппроксимации и расчета спектров.

### 1. Основные определения.

**Частичный естественный спектр (ЧЕ-спектр)** - набор параметров (1) минимального количества  $K_s$  (или во втором случае заданного  $K_v$ ) синусоидальных компонент, сумма которых аппроксимирует на интервале  $[0, T]$  непрерывный процесс  $x(t)$  или дискретный  $x[n]$  с ошибкой, не превышающей заданного значения  $S$  (или с минимально возможной ошибкой во втором случае).

**Полный естественный спектр (ПЕ-спектр)** - набор параметров (1) суммы синусоидальных компонент, аппроксимирующей на интервале  $[0, T]$  непрерывный процесс  $x(t)$  или дискретный  $x[n]$ , где количество компонент  $K_0$  определяется как минимально возможное, при котором равна нулю ошибка аппроксимации  $S$ . ПЕ-спектр может не быть единственным.

В обоих определениях предполагается, что параметры различных гармоник априорно не связаны друг с другом зависимостью. Требование взаимной ортогональности на гармоники также не налагается. Очевидно, что спектры, рассчитанные согласно данным определениям, будут дискретными (линейчатыми) по частоте и, за исключением особых случаев, с конечным числом спектральных линий. Ради сокращения короткой процесс на интервале  $[0, T]$  за исключением оговоренных случаев будем именовать "процессом" или "сигналом".

Необходимо отметить, что не всегда требуется определять ПЕ-спектр – полный и точный спектр процесса. Например, когда анализируется смесь сосредоточенного по спектру сигнала и аддитивного шума, достаточно определить только спектр сигнала. Или напротив, если сигнал широкополосный с наложенной узкополосной помехой, то для вычитания последней следует определить ее спектр. В этих случаях достаточно определять значимые гармоники процесса, то есть его ЧЕ-спектр.

Далее термином "спектр", если не оговорено иное, будет обозначаться Е-, ПЕ- или ЧЕ-спектр. Функции (короткие процессы) в зависимости от типа и структуры, а также результатов расчета их спектров могут быть следующие.

**Гармонизируемая функция (Г-функция);** ее можно точно представить конечной суммой  $K_0$  гармоник в виде (2) или (4) и она имеет ПЕ-спектр. Отрезок любого дискретного процесса и некоторых непрерывных есть Г-функция.

**Однозначно гармонизируемая функция (ОГ-функция);** ее представление в виде (2) или (4) единственное и она имеет однозначный ПЕ-спектр.

**Условно гармонизируемая функция (УГ-функция);** это один из вариантов неоднозначной Г-функции, выбранный с учетом выполнения определенных условий; она имеет условный ПЕ-спектр.

**Частично гармонизируемая функция (ЧГ-функция);** ее при заданном  $K$  можно представить суммой гармоник, лишь с ошибкой  $S \neq 0$ ; она имеет ЧЕ-спектр.

$K_v, K_a$  - количество гармоник - искомое и априорно представляющее функцию;  $K_s, K_0$  - минимальное число частот спектра функции при заданной и нулевой ошибке  $S$ .

Для выбора единственного из множества условных ПЕ-спектров необходимо связывать его параметры функциональными зависимостями или логическими условиями, которые подлежат учету в процессе определения спектра. Например, можно задать значения некоторых из  $K_v$  частот как исходные данные, или потребовать узкополосность их распределения на оси частот, или задать фиксированную

полосу допустимых частот. Возможно требование равномерности распределения частот во всем диапазоне. В последнем случае следует вместе с расстоянием  $S$  минимизировать выражение

$$C \cdot S^2 + \omega_1^2 + (\pi N/T - \omega_{K_v})^2 + \sum_{k=2}^{K_v} (\omega_k - \omega_{k-1})^2, \quad (5)$$

в итоге добиваясь нулевого  $S$ . Известным вариантом такого случая при  $K_v = [N/2]$  и  $\omega_k - \omega_{k-1} = 2\pi/T$  является спектр, формируемый на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Здесь и далее  $[.]$  – целая часть числа. Можно также искать гармоники с амплитудами, не превышающими заданного значения. Или можно использовать выражение

$$C \cdot S^2 + A_0^2 + \frac{1}{K_v} \sum_{k=1}^{K_v} (A_k^2 + B_k^2). \quad (6)$$

Следует ожидать, что тогда будет найден условный ПЕ-спектр с минимальными в среднем значениями амплитуд гармоник. Для поиска определенного количества  $K$  только значимых частот можно минимизировать выражение

$$C \cdot S^2 + \frac{1}{K_v - K} \sum_{k=K+1}^{K_v} R_k^2. \quad (7)$$

Здесь  $R_k^2$  – амплитуды последних (по величине)  $K_v - K$  гармоник. В этом случае спектр должен вычисляться итерационным способом. Для правильной сходимости следует в каждом цикле упорядочивать амплитуды по убыванию.

Необходимо отметить, что во всех рассмотренных случаях значимые спектральные составляющие процесса мало изменяют свое положение на частотной оси относительно истинного. Однако, при наложении достаточно сильных ограничений на параметры спектра нулевое значение  $S$  может вовсе не достигаться. Тогда процесс окажется не гармонизируемым и можно будет рассчитать только его ЧЕ-спектр.

**2. Свойства процессов, определяющие состав и структуру спектров.** Отметим, что при  $3K_v + 1$ , приближающемся к  $N$ , проявляются особенности, как в спектре дискретного процесса, так и при его определении. Это связано с тем, что при  $3K_v + 1 = N$  число неизвестных параметров спектра совпадает с количеством отсчетов процесса. Кроме того, при изменении  $N$  на 3 скачкообразно изменяются характеристики процесса и его спектра. Поэтому для каждой тройки из значений  $N$  введем в рассмотрение условное количество  $K(N) = [(N+2)/3]$  гармоник, которые можно считать содержащимися в дискретном процессе. Пример: для тройки 19, 20 и 21 имеем  $K(N) = 7$ .

По результатам проведенных исследований некоторых процессов и расчета их спектров установлено следующее.

**Утверждение 1.** *Любой дискретный процесс  $x[n]$ , заданный на интервале  $[0, T]$ , можно точно представить суммой (4) из постоянного члена и конечного числа  $K_0$  гармонических составляющих. При этом величина  $K_0$  является минимальной из возможных и не превышает значения  $K(N)$ .  $K_0$  определяется для трех вариантов следующим образом:*

- 1) если  $N$  кратно 3, то  $K_0 \leq N/3 = K(N)$ ;
- 2) если  $N+1$  кратно 3, то  $K_0 \leq (N+1)/3 = K(N)$ ;
- 3) если  $N+2$  кратно 3, то  $K_0 \leq (N+2)/3 = K(N)$ .

*Периодические компоненты в (4) в общем случае не будут взаимно ортогональными. Набор их параметров (1), где  $K = K_0$ , будет ПЕ-спектром, то есть полным гармоническим спектром процесса  $x[n]$ . Сам процесс будет  $\Gamma$ -функцией, то есть гармонизируемой функцией.*

Это утверждение справедливо для любых дискретных детерминированных функций и реализаций случайных процессов, в том числе для отсчетов шума и его аддитивной смеси с любыми сигналами.

**Утверждение 2.** *Любой гладкий (имеющий ограниченную и непрерывную производную) процесс  $x(t)$  на конечном интервале  $[0, T]$  можно представить суммой (2), где  $K = K_0$ . Если  $x(t)$  не содержит гармоник с частотами большими  $\omega_{max}$  (в терминах данной статьи), то  $K_0 \leq K(N)$ , где число отсчетов дискретизованного по времени процесса  $N = [T\omega_{max}/\pi]$ . Здесь  $[[a]]$  – наименьшее целое, превышающее  $a$ . Тогда для этих  $K$  и  $N$  можно так выбрать параметры гармоник, что будет иметь место точное равенство  $x(t)$  с (2) в точках  $t_n = nT/N$  и с минимальной погрешностью между ними. Периодические компоненты, входящие в сумму (2), не обязательно будут взаимно ортогональными на  $[0, T]$ . Набор парамет-*

ров суммы, будет являться ПЕ-спектром, то есть полным гармоническим спектром гладкого процесса  $x(t)$ . Сам процесс будет  $\Gamma$ -функцией.

Если частота  $\omega_{max}$  и количество гармоник  $K_0$  неизвестны, то зависящий от них интервал  $T/N$  дискретизации можно взять равным половине минимального расстояния между соседними нулями производной процесса. В этом случае между соседними отсчетами не будет точек перегиба (изменения знака кривизны).

*Замечание.* Если процесс  $x(t)$  не является гладкой функцией внутри  $[0, T]$ , то частота  $\omega_{max}$  не будет конечной. Тогда искомый ПЕ-спектр будет состоять из бесконечного набора гармоник. Он всегда будет линейчатый, однако менее плотный, чем построенный путем разложения процесса в бесконечный ряд Фурье. При задании числа искомого гармоник  $K_v$  конечным значением, можно построить ЧЕ-спектр процесса с некоторой ошибкой  $S$ . Для ее уменьшения  $K_v$  следует увеличить. Если спектр рассчитывать по дискретизованному процессу, то согласно утверждению 1, количество гармоник в спектре будет ограничено:  $K_v \leq K(N)$ .

Далее, если не оговорено иное, будут рассматриваться процессы, для которых выполняются условия (8). Из обобщения утверждений 1 и 2 вытекает следующее.

**Следствие 1.** *Поскольку любая дискретная или гладкая функция может быть аппроксимирована суммой, состоящей из константы и  $K_0 \leq K(N)$  синусоид, то важно следующее. Посредством ограниченного числа гармонических составляющих можно воспроизвести (сформировать) отрезок любого дискретного или гладкого процесса. И его спектром будет набор (1), где  $K=K_0$ . Более того, гладкий процесс, как и последовательность его отсчетов на интервале  $[0, T]$  при соответствующем выборе  $N$  и  $K$  (согласно (8)) будут иметь одинаковую аппроксимирующую функцию (4) и, следовательно, совпадающие дискретные (линейчатые) спектры (1). Аппроксимация и воспроизведение с помощью (2) будут точными в выбранные дискреты времени и с минимальными ошибками между ними.*

Использование утверждений 1 и 2 позволяет уменьшить число отыскиваемых частот процесса с минимально возможного  $[N/2]$ , как при расчете ДПФ, до  $K_0$ , которое не больше  $K(N)$ , соизмеримого с  $N/3$ .

**Утверждение 3.** *Минимальное количество гармоник, которое в сумме с постоянной составляющей  $A_0$  точно представляет дискретный процесс, являющийся неоднозначной  $\Gamma$ -функцией, равно  $K(N)$ . При этом процесс будет иметь наименее плотный неоднозначный ПЕ-спектр. Это позволяет задавать различные варианты заполнения формируемого процесса минимальным количеством зависимых гармоник, например, для преднамеренного создания неопределенности при последующем анализе процесса.*

**Утверждение 4.** *Максимальное количество гармоник, которое вместе с постоянной составляющей  $A_0$  может содержать дискретный процесс, оставаясь ОГ-функцией, равно  $K_0=K(N)$ . Если постоянная отсутствует и  $N$  кратно 3, то  $K_0=K(N)$ . В этих случаях процесс, который назовем стандартным, имеет наиболее плотный однозначный ПЕ-спектр. Данное утверждение позволяет определять предел заполнения формируемого процесса независимыми и поэтому различимыми гармониками.*

**Следствие 2.** *Любой процесс, разлагаемый в (2) или (4), кроме стандартного, станет УГ-функцией, то есть будет иметь условный ПЕ-спектр, если выполнится условие  $K=K(N)$ . Более того, если процесс при некотором числе гармоник  $K_v$  не гармонизируемый, то при его увеличении станет гармонизируемым. Это следует из того, что увеличение численности набора (1) приводит к повышению точности аппроксимации.*

**Следствие 3.** *Полигармонические процессы с количеством гармоник, указанным в утверждении 3, реализации случайного нормального некоррелированного процесса (шума), а также их аддитивные смеси с любыми сигналами не являются ОГ-функциями ни при каких соотношениях  $K$  и  $N$ . Но согласно следствию 2 они могут стать УГ-функциями. В частности добавление заметного шума к ОГ-функции превращает ее или в УГ- или, при малом  $K$ , в ЧГ-функцию.*

Изложенное выше иллюстрируется примером для  $N$  кратного 3. Пусть два сигнала  $x_1[n]$  и  $x_2[n]$  имеют ПЕ-спектры (1) с большим количеством гармоник  $K_1, K_2 \leq K(N) = N/3$ , среди которых нет общих. Тогда их аддитивная смесь  $x_3[n]$  будет состоять из  $K_1 + K_2 > N/3$  гармоник. Однако она будет иметь ПЕ-спектр, для которого  $K_3 \leq N/3$ . В частности, если  $x_2[n]$  есть реализация случайного шума, то  $K_2 = K_3 = N/3$ . Поэтому для избежания потерь информации о ПЕ-спектре полезного сигнала не следует формировать его из гармоник в количестве, большем  $N/3$ .

**Свойство 1.** *В общем случае количество гармоник  $K_a$ , сформировавших исследуемый процесс, может быть большим, но ограниченным (большем предельного значения из (8)), неограниченным бесконечным счетным или бесконечным несчетным (континуум). Не смотря на это процесс, являясь  $\Gamma$ -функцией, будет иметь неоднозначный ПЕ-спектр с существенно меньшим количеством гармоник*

$K_0 \ll K_a$ . А при соблюдении дополнительно заданных условий он будет иметь единственный условный ПЕ-спектр.

Причем, традиционные спектры процессов, сформированных указанными тремя способами, рассчитанные по конечному ряду (ДПФ), бесконечному ряду и интегралу Фурье соответственно, являются условными ПЕ-спектрами этих процессов.

На рис.1 в системе координат: число отсчетов  $N$ , количество отыскиваемых гармоник  $K_v$ , показаны области расчета (по результатам аппроксимации) однозначных ПЕ-, условных ПЕ- и ЧЕ-спектров дискретного процесса при различных соотношениях  $K_v$  и  $K_a$ . В области 1 (над кривыми) любой набор

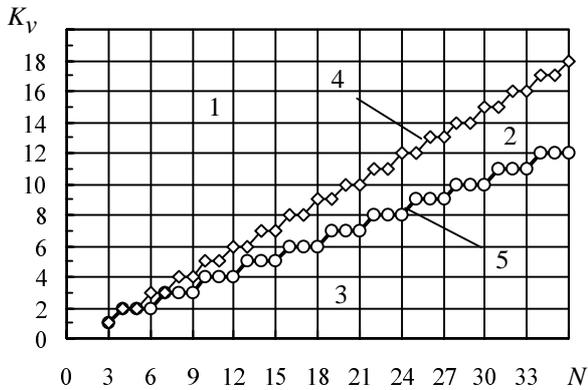


Рис. 1. Зависимость количества гармоник процесса от его длительности. Области расчета ПЕ-спектров: 1,2 – области неоднозначности; 3 – область единственности при  $K_v=K_a$ ; неоднозначности при  $K_v \geq K_a$  и единственности для ЧЕ-спектра при  $K_v < K_a$ ; 4 – количество гармоник в спектре ДПФ; 5 – предельные значения для количества гармоник  $K_0$  в ПЕ-спектре.

гармоник пригоден для точной, но неоднозначной аппроксимации процесса. В области 2 (между кривыми) только определенные наборы обеспечивают правильную аппроксимацию. В области 3 (под кривыми) возможны различные варианты, в том числе с приближенной аппроксимацией. Если процесс эквивалентен шуму, то вместо  $K_a$  берется  $K(N)$ .

В таблице 1 в качестве примера отображены все варианты расчета спектра процесса длительностью  $N=13,14,15$ . Области расчета трех типов спектра обозначены как О, У и Ч соответственно. Причем, процесс и его спектр рассмотрены раздельно как имеющие, так и не имеющие постоянную составляющую  $A_0$ .

Заключая, можно отметить, что все дискретные процессы разделяются на два типа.

1) ОГ-функции, к ним относятся представимые в виде (4), где  $K \leq K(N)$  при  $N$  кратном 3 и отсутствии постоянной составляющей, или где  $K \leq K(N)-1$ . В этих случаях число параметров спектра не превышает числа отсчетов процесса.

Таблица 1

6	1	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у			
	0	у																у	у		
5	1	у								у	у	у	у	у	у	у	у	у	у		
	0	у						у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у	у		
4	1	у					у	о	о	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч		
	0	у	у				у	о	о	ч									ч	ч	
3	1	у					у	о	о	ч									ч	ч	
	0	у		у	о	о	ч												ч	ч	
2	1	у	у	о	о	ч													ч	ч	
	0	у	о	о	ч														ч	ч	
1	1	о	о	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	
	0	о	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	
$K_v$		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1								
$K_a$			1		2		3		4		5		6								$\xi_n$

2) УГ-функции, к ним относятся оставшиеся из представимых в виде (4), где  $K=K(N)$ . В этом случае число параметров спектра превышает число отсчетов процесса на минимально возможную величину, то есть согласно (8) на 1, 2 или 3. Примерами являются сумма гармоник в количестве не меньшем, чем  $K(N)$ , выборка нормального случайного процесса или его суммы с другими сигналами.

**3. Общий метод определения спектра.** Утверждения 1 и 2 и их следствия позволяют уточнить и детализировать постановку задачи, сформулированную в начале статьи, по аппроксимации анализируемого дискретного процесса и определению его спектра. Возможны два варианта алгоритма расчета.

1) Расчет ЧЕ- и однозначного ПЕ-спектра. В этом случае соотношение числа искомых гармоник и длины сигнала должно быть  $K_v < K(N)$ .

2) Расчет неоднозначного и условного ПЕ-спектров. Здесь соотношение числа искомых гармоник и длины сигнала  $K_v = K(N)$ .

Чтобы точнее определять, какого типа спектр может быть получен для конкретного сочетания  $N$ ,  $K_v$ ,  $K_a$ , были проведены его расчеты для полигармонических сигналов и реализаций нормального случайного процесса. Анализ результатов показал следующее.

Однозначный ПЕ-спектр получится, если выполняются определенные условия. В компактной и точной форме их можно записать логическим соотношением

$$\{(K_v \leq K(N)-1) \wedge \{(K_v = K_a) \wedge [(A_{0a}=0) \vee (A_{0a} \neq 0) \wedge (A_{0v} \neq 0)] \vee (K_v = K_a + 1) \wedge (A_{0v} = 0) \wedge [(A_{0a} \neq 0)]\}\} = 1.$$

Условный ПЕ-спектр может быть получен, если выполняется условие

$$\{(K_v \leq K(N)-1) \wedge \{(K_v \geq K_a + 1) \wedge [(A_{0a} = 0) \vee (A_{0a} \neq 0) \wedge ((K_v \geq K_a + 2) \vee (K_v = K_a + 1) \wedge (A_{0v} \neq 0))]\}\} \vee (K(N) \leq K_v) \vee (x[n] = \xi[n]) \wedge [(K_v \geq K(N) + 1) \vee (K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} \neq 0)]\} = 1.$$

Для процесса может быть получен только ЧЕ-спектр, если выполняется условие

$$\{(K_v \leq K(N)-1) \wedge [(K_v \leq K_a) \wedge [(A_{0v} = 0) \vee (K_v + 1 \leq K_a) \wedge (A_{0v} \neq 0)] \vee (x[n] = \xi[n]) \wedge [(K_v \leq K(N)-1) \vee (K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} = 0)]]\} = 1.$$

Кроме того, если  $N$  кратно 3 и  $[(K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} = 0)] = 1$ , то можно рассчитать однозначный ПЕ-спектр процесса, как стандартного, если  $[(K_a = K_v) \wedge (A_{0a} = 0)] = 1$ , и условный ПЕ-спектр, если истинно выражение

$$(K_a = K_v) \wedge (A_{0a} = 1) \vee (K_a > K_v).$$

Запись  $(x[n] = \xi[n])$  означает, что  $x[n]$  является реализацией дискретного нормального случайного процесса. Если  $K_a$  неизвестно, то следует использовать  $K(N)$ . При неизвестной  $A_{0a}$  следует допустить существование этой постоянной составляющей.

В соответствии с этими условиями возможны *три процедуры расчета спектра* в зависимости от комбинации типа процесса и варианта алгоритма.

1) Вариант 1 алгоритма для процесса типа 1. а)  $K_a = K_v$ . В этом случае будет рассчитан однозначный ПЕ-спектр. б)  $K_a < K_v$ . Можно получить или неоднозначный или условный ПЕ-спектр. в)  $K_a > K_v$ . Может быть рассчитан ЧЕ-спектр, поскольку он определяется по результатам неточной аппроксимации.

2) Вариант 2 алгоритма для процесса типа 1 и 2. При  $K_a \leq K_v$  можно получить или неоднозначный или условный ПЕ-спектр, так как здесь число искомых параметров спектра превышает число исходных данных.

3) Вариант 1 алгоритма для процесса типа 2. При  $K_a > K_v$  аппроксимация будет осуществлена неточно, поэтому получится ЧЕ-спектр. При  $K_a = K_v$  и отсутствии в процессе постоянной составляющей получится однозначный ПЕ-спектр.

*Способ расчета ПЕ-спектра* процесса может иметь две модификации.

1) Количество гармоник  $K_a$ , содержащихся в процессе, известно или задается. Если процесс имеет тип 1, то должна использоваться процедура 1 для  $K_a = K_v$ . Если процесс типа 2, то – процедура 2.

2) Количество гармоник неизвестно. В этом случае следует задать начальное  $K_v = K(N)$  и использовать процедуру 2. Если получится неоднозначный ПЕ-спектр, надо уменьшить  $K_v$  на единицу и воспользоваться процедурой 1. Если здесь ПЕ-спектр не будет найден, то им должен стать предыдущий результат. Такой процесс будет иметь тип 2. В противном случае надо опять уменьшить  $K_v$  и снова рассчитать спектр по процедуре 1. И так далее, до получения ПЕ-спектра с минимально возможным  $K_v$ . Тогда процесс будет иметь тип 1. На последнем этапе возможно получение как однозначного, так и условного ПЕ-спектра.

*Способ расчета ЧЕ-спектра процесса.* Здесь  $K_a$  предполагается таким, что  $K_a > K_v$ . В этом случае задается требуемое количество спектральных составляющих  $K_v$  или допустимая ошибка  $S$  аппроксимации и используется расчетная процедура 1 или 3.

Основой рассмотренных алгоритмов вычисления спектров является минимизация целевой функции  $S$  из (3) по параметрам (1) при заданном  $K$ . Для этого составляется и решается система  $3K+1$  линейных и нелинейных (трансцендентных относительно частот) уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial A_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial A_k} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial B_k} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial \omega_k} = 0, \quad (9)$$

где  $k=1,2,\dots,K$ . Поскольку система нелинейная и может не быть необходимого соответствия между  $K_s$ ,  $K_0$ ,  $K_v$ ,  $K_a$  и  $N$ , то при решении не всегда получится единственный спектр - набор параметров (1) или не будет достигнуто нулевое значение ошибки  $S$ . Аналитическое решение полученной системы ввиду математических сложностей в настоящее время затруднительно. Однако, оно возможно численными итерационными методами. Один из них предлагается следующий.

**4. Статистический параллельный метод расчета спектра.** Для заданного количества спектральных частот  $K = K_v$  выбирается исходная точка – их начальные значения  $\{\omega_k\}$ . Затем, после решения системы линейных уравнений, составленной из первых трех групп (9) относительно  $A_0, A_1, B_1, \dots, A_K, B_K$ , рассчитывается величина ошибки  $S$ . Далее с целью определения направления изменения частот, при кото-

ром происходит уменьшение ошибки, выбираются несколько точек в окрестности исходной и для каждой из них рассчитывается  $S$ . Точка, в которой она минимальна, обозначается как новая исходная. Процесс повторяется до достижения локального минимума  $S$ . Последние значения частот и им соответствующие параметры считаются E-спектром процесса. При приближении набора частот к оптимальному размер окрестности следует уменьшать. Изменяя положение начальной точки, достигаем глобального минимума  $S$ . Если выбор исходной и промежуточных точек осуществлять случайным образом, то решение задачи будет основано на методе Монте-Карло.

Данным методом были рассчитаны спектры различных сигналов. Ниже приведены результаты по трем из них.

*Пример 1.* Рассчитывались спектры пяти сигналов, состоящих из  $K_a=2$  синусоид, реализаций помехи в виде случайного нормального процесса и из их аддитивной смеси. Параметры синусоид: относительные частоты  $p=\omega T/(2\pi N)$  равны 0.1895 и 0.3157; амплитуды 50 и 100 соответственно; фазы в реализациях случайные, равномерно распределенные в  $[0,2\pi]$ . Число отсчетов в каждой реализации  $N=14$ . Количество отыскиваемых гармоник спектра взято максимальным  $K_v=5$ . Поскольку  $K_a < K_v$  и  $N < 3K_v+1$ , то при наличии шума каждая реализация сигнала является неоднозначной  $\Gamma$ -функцией. Для нее может быть рассчитан только неоднозначный ПЕ-спектр, то есть один из множества возможных, что и было сделано. Полученные варианты спектра случайны, поскольку расчеты определялись заданием начальных частот и их коррекцией с использованием датчика случайных чисел. Расчеты спектра смеси проводились для трех значений СКО шума  $\sigma=2.5; 5; 10$ . Всего было обработано 500 частот, принадлежащих 100 реализациям сигналов: по 20 для каждого из 5-ти типов сигнала. Среднеквадратичная ошибка  $S$  аппроксимации суммой (2) задавалась не более  $10^{-8}$ . Результаты представлены на рис. 2, 3 и 4 в виде кривых, каждая из которых является плотностью распределения вероятностей относительных частот гармоник сигнала в диапазоне  $[0,0.5]$ . Значения каждой плотности  $F(p)$  вычислены путем взятия

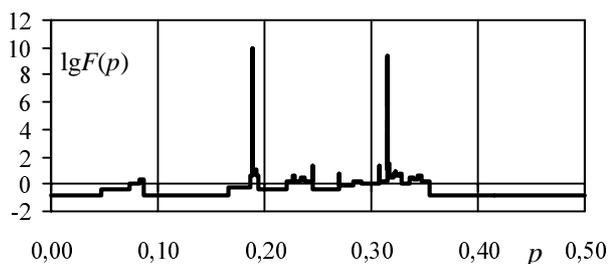


Рис.2. Распределение вероятностей частот спектра сигнала при отсутствии шума.

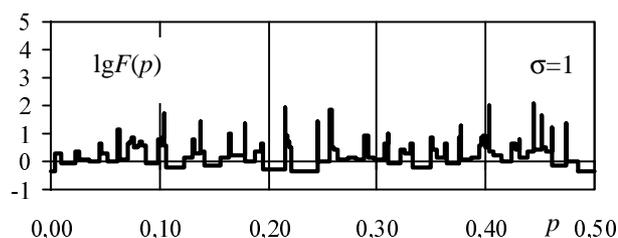
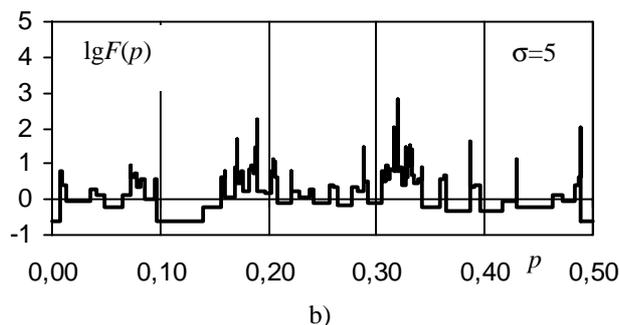
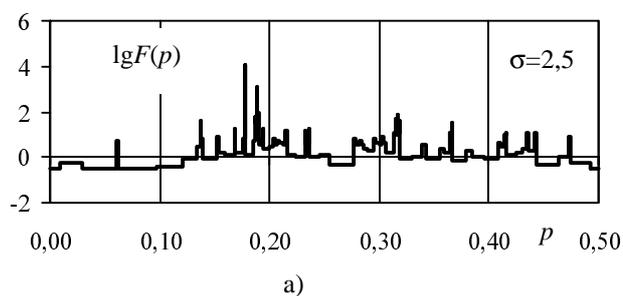


Рис.3. Распределение вероятностей частот спектра шума.

производной от дискретной функции распределения, построенной по выборке из 100 значений частот, и представлены в десятичном логарифмическом масштабе. Если эти числа умножить на 20, то получим значения в децибелах. Кривые показывают распределение частот в ПЕ-спектре шума, сигнала без и с наложенным шумом. Из рис. 4 видно, что имеется возможность обнаружения, различения и определения параметров 2-х синусоид, несмотря на малую длительность сигнала (14 отсчетов) и наличие шума (с  $\sigma$  до 10). При отсутствии шума возможно различение гармоник с частотами, различающимися по частоте много меньше, чем на  $1/14$  - предельного разрешения по спектру Фурье.

Изложенный способ прост, но для общих случаев трудоемок. Однако решение может быть получено и более эффективными способами. Это *аналитический параллельный и статистический последовательный методы* определения спектра, при некоторых соотношениях  $K_a$ ,  $K_v$  и  $N$ . Они рассматриваются в п.7 и п.8.



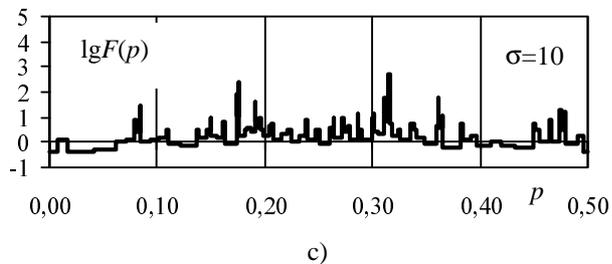


Рис.4. Распределение вероятностей частот спектра сигнала при наличии шума

**5. Отличительные свойства спектров.** Сопоставление однозначного ПЕ-спектра дискретного процесса с традиционным, получаемым на основе ДПФ, показывает следующее. В первом случае спектр менее плотный, поскольку представляется гармониками с максимальным числом  $[(N-1)/3]$ , меньшим, чем во втором, всегда равным  $[(N-1)/2]$  (без учета симметричных). То есть, имеет место большая избыточность спектра на основе ДПФ по количеству частот, как наиболее информативных параметров. Классический спектр гладкого процесса еще более избыточен, чем дискретного. Действительно, в этом случае его спектром является либо бесконечный набор частот и коэффициентов разложения процесса в ряд Фурье, либо это непрерывные функции косинус и синус преобразования при представлении процесса интегралом Фурье.

Далее, однозначный ПЕ-спектр и спектры, построенные на основе любого разложения Фурье, несут в себе принципиально разное физическое представление об исследуемом процессе. Во втором случае они не столько характеризуют отрезок процесса, сколько должны определять частотную характеристику устройства, предназначенного для приема и обработки бесконечного процесса аperiodического или периодического. Однозначный ПЕ-спектр реально отражает спектральную структуру процесса на интервале  $[0, T]$  и только его.

В некоторых случаях при использовании традиционных способов расчета спектра, близкого к реальному, применяются оконные (выделяющие) функции. На них множится анализируемый сигнал для его сглаживания или полученный спектр для его корректировки. Причем, для эффективного решения каждой задачи требуется конструирование своей оптимальной функции. Напротив, в методах расчета ПЕ- и ЧЕ-спектров применение окон не требуется, так как частоты гармоник определяются точно, как спектральные линии.

Если в исследуемом колебательном процессе отсутствует шумовая составляющая (точнее он есть ОГ-функция), то использование ПЕ-спектра позволяет определять (разрешать) гармоники, различающиеся по частоте на любую предельно малую величину, в том числе значительно меньшую, чем  $1/T$  - дискреты сетки частот рядов Фурье. То же имеет место и для дискретизованного непрерывного процесса. Разумеется, при наложении шума происходит соответствующее ухудшение разрешения.

Далее, относительно экстраполяции коротких процессов, основанной на аппроксимации предлагаемым методом, можно отметить следующее. Она возможна для стационарного процесса с применением аппроксимирующей функции (2), если найден единственный ПЕ-спектр. Условная (ограниченная) экстраполяция возможна, если найден единственный ПЕ-спектр с использованием, например (5) - (7), то есть условный ПЕ-спектр. Она также возможна, когда найден ЧЕ-спектр с использованием тех же (5) - (7), если в него вошли все значимые гармоники. Если же разложить короткий процесс в ряд или представить его интегралом Фурье, то его прогнозирование путем экстраполяции полученной аппроксимирующей функции бессмысленно. Действительно, экстраполированная кривая по определению будет в первом случае всегда периодической, а во втором аperiodической (нулевой вне  $[0, T]$ ) независимо от природы и свойств исходного процесса.

**6. О методе Прони.** Наиболее близким к предложенному в данной статье методу в плане поставленной задачи является модифицированный метод наименьших квадратов Прони [1]. Он также позволяет определять линейчатый спектр коротких процессов. Однако он не рассмотрен применительно к отрезкам непрерывных процессов и область его использования существенно ограничена. Некоторые ограничения следующие.

1) Чтобы результаты по методу Прони получились правильными, исследуемый дискретный процесс должен быть адекватен модели (аппроксимирующей функции), которая принята строго полигармонической. Поэтому перед расчетом спектра из процесса должны быть исключены все тренды, в частности, детерминированные составляющие, в том числе постоянная.

2) Если исследуемый процесс при заданном  $K_v$  не есть  $\Gamma$ -функция, то среди отыскиваемых решений характеристического полинома, аналогичного (12), могут быть комплексные числа. В таком случае из процесса не будут выделены все искомые действительные гармоники, составляющие частичный спектр.

3) Не может быть рассчитан полный спектр процесса, если имеет место  $N=3K_v-1$  или  $N=3K_v-2$  при условии, что количество искомых гармоник совпадает с априорно существующим, то есть  $K_v=K_a$ . Причем, это не зависит от того, присутствует в процессе постоянная составляющая или нет. Это предельный случай, когда число искомых параметров превышает число исходных данных на минимальную величину. Существование таких процессов следует из утверждения 1. Нельзя даже рассчитать спектр полигармонического процесса с постоянной составляющей при  $N=3K_v+1$ .

4) Не может быть рассчитан частичный спектр процесса, если  $K_v < K_a$  при условии  $3K_v, 3K_0 < N$ . То есть, когда процесс априорно содержит гармоник больше, чем подлежит определению. Например, это необходимо для выделения значимых гармоник из зашумленного процесса.

Следует отметить, что линейчатый спектр процесса, рассчитываемый по методу Прони, является частным случаем ПЕ-спектра. Это тот вариант однозначного ПЕ-спектра, когда процесс дискретный, априорно гармонизируемый, без постоянной составляющей и для которого  $3K_v \leq N, K_v=K_a$ . Более того, метод решения такой задачи, основанный на линейном предсказании, в настоящее время известен [2, п.20.6-6]. Он использован ниже в качестве вспомогательного.

**7. Аналитический параллельный метод определения спектра.** Этим способом могут быть определены ПЕ-спектры процессов, являющихся  $\Gamma$ -,  $OG$ - и  $UG$ -функциями, то есть любыми, кроме  $ЧГ$ -функций, для которых искомый спектр при заданном  $K_v$  должен получиться неполным, то есть  $ЧЕ$ -спектром.

Выше отмечено, что согласно утверждению 2, непрерывный процесс может быть точно представлен суммой (2), а при условии гладкости полностью определяется последовательностью (4). Следовательно, задача по определению ПЕ-спектра непрерывного процесса сводится к определению спектра соответствующей последовательности. Поэтому далее метод излагается применительно к дискретным процессам. Оценивать точность спектра будем величиной (3) отклонения аппроксимирующей последовательности (4) от заданного процесса. Будут рассмотрены четыре варианта.

Прежде рассмотрим простую задачу, когда анализируемый процесс предполагается содержащим только гармонические составляющие, число которых  $K_a \leq [N/3]$ . Тогда для определения параметров спектра (1), где  $A_0=0$ , следует непосредственно воспользоваться методом линейного предсказания, задав  $K_v \geq K_a$ . Если  $K_a$  неизвестно, то расчеты можно начинать с малых  $K_v$ . При отсутствии решения следует увеличить  $K_v$  и повторить расчеты. В рассматриваемом случае получится единственный ПЕ-спектр процесса.

Рассмотрим вариант 1, когда процесс состоит из суммы постоянной  $A_0$  и гармонических составляющих; число которых такое, что  $3K_a \leq N$ . К данному случаю относятся процессы, для которых  $K_a \leq K(N)-1$ . Для них может быть рассчитан единственный однозначный ПЕ-спектр. Сюда относятся также процессы, для которых  $N$  кратно 3 и  $3K_a = N$ . В других случаях во всех вариантах 1-3 будут получаться неоднозначные ПЕ-спектры.

Итак, в 1-м варианте для расчета спектра можно применить итерационный способ определения неизвестного параметра. В данном случае это  $A_0$ . В качестве вспомогательного используем упомянутый метод линейного предсказания. Процедура решения следующая.

1) Задается число отыскиваемых гармоник  $K=K_v$  и начальное значение  $A_0$ .

2) По имеющимся отсчетам  $x[n]$  находятся полиномиальные коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ . Для этого решается специальная система линейных уравнений

$$\partial \epsilon / \partial \alpha_k = 0; k=1, \dots, K, \text{ где} \quad (10)$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{N-2K} \epsilon_i^2; \quad \epsilon_i = \sum_{k=0}^{K-1} (x_{i+k-1} + x_{2K+i-k-1} - 2A_0) \alpha_k - (x_{K+i-1} - A_0) \alpha_K. \quad (12)$$

Здесь  $\alpha_0 = -1$ . Это эквивалентно определению минимума  $\epsilon$  по  $\{\alpha_k\}$ . Если  $N$  кратно 3 и  $N=3K$  (это предельный вариант 1 для  $K_0$  из (8)), то  $\{\alpha_k\}$  находятся проще – в результате решения системы  $\{\epsilon_i = 0\}$ ,  $i=1, \dots, K$ .

3) Определяются частоты  $\omega_1, \dots, \omega_K$  спектра как корни тригонометрического уравнения (характеристического полинома)

$$\cos K\omega\Delta t - \alpha_1 \cos(K-1)\omega\Delta t - \dots - \alpha_{K-1} \cos\omega\Delta t - 0.5\alpha_K = 0. \quad (12)$$

4) Рассчитываются амплитуды частот  $A_1, B_1, \dots, A_K, B_K$  путем совместного решения 2-й и 3-й групп линейных уравнений из (9). Определяется по (3) и оценивается отклонение  $S$ .

5) Путем целенаправленного перебора значений  $A_0$  и повторения шагов 2-5 ищется минимальная (нулевая) ошибка  $S$ , которая всегда должна достигаться. Это будет решение первого нелинейного уравнения из (9) относительно  $A_0$ .

В итоге значения (1), найденные в последнем цикле, будут являться параметрами ПЕ-спектра. Исследуемый процесс  $x[n]$  может иметь количество  $K_a$  гармоник меньше, чем заданное  $K_v$ . Однако свойства метода линейного предсказания таковы, что в результате проведения расчетов почти всегда будет найдено его фактическое значение  $K_a \leq K_0$ . Но чтобы избежать такой ситуации, можно начинать расчеты с малого  $K_v$  и при отсутствии решения постепенно увеличивать его.

Согласно следствию 2 процесс при  $N$  кратном 3 и  $3K_a = N$  есть УГ-функция. Поэтому если начальное значение  $A_0$  задать иным, будет получен другой ПЕ-спектр. Для получения единственного спектра необходим обоснованный выбор  $A_0$  среди возможных.

Пусть теперь  $N+1$  кратно 3 и  $N=3K_a-1$  (это вариант 2). В этом случае задаются начальные значения  $A_0$  и частоты  $\bar{\omega}$  одной из  $K_a$  гармоник (шаг 1). Далее вместо (10) составляется и решается для  $K=K_v$  система линейных уравнений (шаг 2)

$$\begin{cases} \cos K\bar{\omega}\Delta t - \alpha_1 \cos(K-1)\bar{\omega}\Delta t - \dots - \alpha_{K-1} \cos\bar{\omega}\Delta t - 0.5\alpha_K = 0; \\ \partial \varepsilon / \partial \alpha_k = 0; \quad k = 1, \dots, K-1. \end{cases} \quad (13)$$

После подстановки найденных  $\{\alpha_k\}$  в (12) определяются частоты  $\{\omega_k\}$ , в числе которых будет и предварительно заданная  $\bar{\omega}$  (шаг 3). Путем перебора  $A_0$  и  $\bar{\omega}$  и повторения шагов 2-4 ищется нулевое значение  $S$ . Это будет решение системы 2-х нелинейных уравнений

$$\partial S / \partial A_0 = 0; \quad \partial S / \partial \bar{\omega} = 0 \quad (14)$$

относительно  $A_0$  и  $\bar{\omega}$ . Далее находятся амплитуды всех  $K$  частот  $\{A_k, B_k\}$ . По завершении определенного количества циклов будет получен спектр процесса. Описанный алгоритм есть совместное решение 2-й и 3-й (из четырех) групп уравнений из (9), уравнений (13),  $K-1$  уравнений (12) и уравнений (14) относительно  $4K+1$  неизвестных  $A_1, B_1, \dots, A_K, B_K, \alpha_1, \dots, \alpha_K, \omega_1, \dots, \omega_{K-1}, A_0, \bar{\omega}$  соответственно. Из указанных уравнений нелинейные только два (14).

Полученный спектр, соответствующий начальным значениям  $A_0$  и  $\bar{\omega}$ , будет одним из множества ПЕ-спектров. Для получения единственного спектра необходимо при расчете  $S$  связывать эти параметры соответствующими логическими или функциональными условиями.

В третьем, последнем варианте ( $N+2$  кратно 3 и  $N=3K_a-2$ ) начальные значения задаются для 3-х параметров:  $A_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ . Вместо (13) составляется и решается для  $K=K_v$  система уравнений

$$\begin{cases} \cos K\bar{\omega}_j\Delta t - \alpha_1 \cos(K-1)\bar{\omega}_j\Delta t - \dots - \alpha_{K-1} \cos\bar{\omega}_j\Delta t - 0.5\alpha_K = 0; \\ \partial \varepsilon / \partial \alpha_k = 0; \quad k = 1, \dots, K-2; \quad j = 1; 2. \end{cases}$$

Далее определяются частоты  $\{\omega_k\}$  путем решения уравнения (12) и их амплитуды (шаг 4). Варьируя тремя указанными параметрами, оценивая  $S$  и добиваясь его нулевого значения, получаем итоговые параметры ПЕ-спектра (шаг 5). То есть, в данном варианте решается та же система, что и в предыдущем, но с добавлением вместо одного – двух линейных уравнений относительно коэффициентов  $\{\alpha_k\}$ . В итоге система имеет три нелинейных уравнения:  $\partial S / \partial A_0 = 0; \quad \partial S / \partial \bar{\omega}_1 = 0; \quad \partial S / \partial \bar{\omega}_2 = 0$ .

Как и во втором варианте для получения единственного спектра из множества возможных необходимо при расчетах связывать параметры  $A_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  соответствующими условиями, например (5) - (7).

Если в двух последних вариантах определить количество  $K_a$  гармоник спектра не представляется возможным, то следует начинать расчеты с малого  $K_v$  и увеличивать его до получения правильных результатов. Следует заметить, что в рассмотренных расчетных алгоритмах определение  $K_a$  не является сложной проблемой, как это может показаться. Для уточнения его значения требуются лишь повторные вычисления.

Таким образом, предложенный метод, основанный на утверждениях 1 и 2, позволяет значительно уменьшить число нелинейных уравнений в системе (9), подлежащей решению. А именно - с  $N/3$ ,  $(N+1)/3$  и  $(N+2)/3$  до 1-го, 2-х и 3-х при  $N$ ,  $N+1$  и  $N+2$  кратных 3 соответственно. И что важно, это число остается постоянным для любого количества  $N$  отсчетов процесса  $x[n]$ .

Изложенный метод не может быть использован при определении ЧЕ-спектра. То есть, когда подлежат определению только основные гармоники процесса, если в нем присутствуют и иные составляющие, например, шумовые. Но приближение к такому спектру может быть найдено. Это будут значимые гармоники условного ПЕ-спектра, при расчете которого данным методом минимизируется (7). При этом соотношение величин  $N$  и  $K_a$  должно соответствовать одному из трех вариантов. Ниже предлагается более эффективный метод расчета ЧЕ-спектра.

**8. Статистический последовательный метод определения спектра.** Имеем ввиду, что согласно свойствам спектра, число искомых гармоник сигнала ограничено  $K_v \leq N/3$ . Если  $K_v = N/3$ , то для решения задачи можно использовать *аналитический параллельный алгоритм* расчета ПЕ-спектра. Если  $K_v < K_a \leq N/3$ , то - *статистический параллельный для ЧЕ-спектра*. Однако второй метод при большом  $K$  оказывается трудоемким. Кроме того, за заданное время при недостаточной вычислительной мощности вместо глобального может быть получено локальное решение. Используя свойства дискретного сигнала можно построить более *быстрый алгоритм расчета ПЕ- и ЧЕ-спектра*. Предлагается процесс вычислений, основанный на последовательном уточнении частот отдельных групп гармоник.

Предположим, что известны все  $K$  относительных частот  $\{p_k\}$  гармоник сигнала  $x[n]$ . Здесь  $p_k = \omega_k T / (2\pi N)$  определены в интервале  $[0, 0.5]$ . Упорядочим их по возрастанию значений. Они расположатся плотными секторами. Внутри каждого сектора расстояние между соседними частотами будет не более  $1/N$ . Тогда, расстояние между соседними секторами будет не менее  $1/N$ . Обозначим через  $K_c$  максимальное количество частот в плотных секторах. Будем считать  $K_c$  *размером сектора*. Можно утверждать, что имеет место следующее вполне очевидное свойство.

**Свойство 2.** *Процесс и результат определения частот  $\{p_k\}$  сигнала  $x[n]$  внутри плотного сектора существенным образом зависит от их совместного распределения, но относительно мало от распределения частот в остальных секторах.*

Предлагается следующий алгоритм, основанный на использовании свойства.

1. Считая известными размер сектора  $K_c$  и количество искомых гармоник  $K$ , задаем в интервале  $[0, 0.5]$  начальные значения  $\{p_k\}$  их частот. Упорядочим их по возрастанию. Рассчитываем амплитуды  $\{A_k, B_k\}$  спектра методом наименьших квадратов с использованием расстояния  $S$  между сигналом и суммой гармоник в виде (3). Далее вычитаем из сигнала найденные гармоники. Получаем остаточный сигнал. Рассчитанное расстояние между сигналом и гармониками примем в качестве начальной ошибки аппроксимации  $S_m$ . Это будет среднее квадратичное значение остаточного сигнала.

2. Добавляем (возвращаем) в остаточный сигнал группу из  $K_c$  удаленных гармоник с номерами  $i, i+1, \dots, i-1+K_c$ , где  $i=1$  для первой группы. Определяем ошибку аппроксимации  $S$  для такого случая.

3. Определяем (уточняем) параметры  $K_c$  гармоник текущей группы. Для этого методом итераций и случайного поиска минимизируем  $S$  по частотам  $\{p_k\}$  и амплитудам  $\{A_k, B_k\}$  гармоник группы, всякий раз сравнивая результат с величиной  $S_m$ . Значения частот других групп не изменяем. После этого определяем (уточняем) амплитуды гармоник вновь сформированных и остальных. Вычитаем все гармоники из сигнала, то есть, получаем новый остаточный сигнал. Пересчитываем расстояние  $S_m$ , которое должно получиться меньшим прежнего. Упорядочиваем частоты всех гармоник по возрастанию.

4. Добавляем (возвращаем) в остаточный сигнал другую группу гармоник из удаленных: уточненные гармоники с номерами  $i, i+1, \dots, i-1+K_c$  для следующего  $i$ . Рассчитываем  $S$ . Уточняем параметры.

5. Последовательно увеличивая  $i$  на единицу, повторяем этапы 3 и 4  $K-K_c$  раз. Пройдя весь частотный диапазон, возвращаемся к его началу – к первой группе гармоник.

6. Многократно повторяем этапы с 2-го по 5-й, добиваясь абсолютного минимума  $S_m$ .

В результате описанной процедуры будет получена аппроксимация сигнала гармониками. Последний найденный набор  $\{p_k\}$ ,  $\{A_k, B_k\}$  будет являться ПЕ- или ЧЕ-спектром сигнала. При правильном выборе  $K$  и  $K_c$  процесс эффективен и достаточно быстро сходится к единственному решению. При этом достигнутое значение  $S_m$  получается глобальным. Метод обеспечивает повторяемость результатов при выборе других начальных значений частот  $\{p_k\}$ .

Если расстояние между соседними частотами сигнала больше, чем  $1/N$ , то имеем  $K_c = 1$ . Тогда расчет спектра упрощается за счет исключения параллельного перебора значений частот. Метод будет заключаться в минимизации ошибки  $S$  последовательно по значениям каждой из  $K$  частот. Это свойство имеет полезное применение. При формировании сигнала, например для передачи по каналу связи, можно заполнять его гармониками с относительными частотами, расстояния между которыми больше  $1/N$ . В этом случае при анализе принятого сигнала частоты и их параметры будут определены наиболее простым и быстрым способом.

Если  $K$  задать большим числа гармоник, присутствующих в сигнале, то алгоритмом будут выделены дополнительные, но с малыми амплитудами, которыми можно пренебречь.

Если значение  $K_c$  при правильном  $K$  выбрать меньшим, чем требуется, то процесс определения спектра будет медленно или совсем не сходиться к глобальному решению, то есть окажется не эффективным. Это связано с тем, что подлежат определению  $K_c$  частот в плотных секторах, состоящих из большего количества гармоник. В других секторах гармоники будут определены правильно.

Исследуемый сигнал может быть таким, что  $K_c = K$ . В этом предельном случае придется использовать *статистический параллельный метод*.

Возникает вопрос. Каким должен быть размер сектора  $K_c$ , если он не задан и его нельзя обосновать, анализируя априорную информацию о сигнале  $x[n]$ ? Здесь следует начать с минимального  $K_c$ . Далее необходимо выполнить изложенный выше процесс расчета. При этом будет определен спектр с ошибкой  $S_m$ . Если она велика, то необходимо последовательно увеличивать  $K_c$  и повторять расчеты до достижения заданной ошибки. Если требуется достичь ее абсолютного минимума, то при увеличении  $K_c$  следует добиваться повторяемости результатов в последовательных циклах. Если  $K$  выбрано не меньшим числа гармоник, присутствующих в сигнале, то в итоге  $S_m$  должно равняться нулю.

Если сигнал искажен аддитивной шумовой составляющей, то при расчете произойдет выделение дополнительных гармоник, распределенных по секторам. Это приведет к увеличению числа и размера секторов. Однако до определенного уровня шума спектр сигнала можно получить без изменения  $K_c$ . Если требуется определить и спектральные составляющие добавленной помехи, то при расчете следует увеличить  $K_c$ . Увеличение расстояния между частотами внутри секторов позволяет допустить более высокий уровень шума.

Рассмотрим в качестве анализируемого сигнала конечную выборку процесса, близкого к нормальному. В общем случае такой сигнал может быть представлен суммой из  $K \leq K(N)$  гармоник. Они могут принадлежать одной или нескольким плотным секторам. Поскольку нельзя априорно определить  $K$  и  $K_c$ , то приходится предположить  $K_c = K_v = K(N)$ , что наиболее вероятно. В этом случае использование предложенного *статистического последовательного* метода для определения ПЕ-спектра не целесообразно. Аналогичные рассуждения применимы к отрезку любой функции, по своей природе не являющейся суммой гармоник. Примерами являются  $\text{tg } x$ ,  $\text{arcsin } x$ ,  $\sin x/x$ ,  $\ln x$ ,  $\exp x$  и другие специальные функции. Для получения их спектров следует использовать *статистический или аналитический параллельные* методы.

Предложенным статистическим последовательным методом были рассчитаны спектры некоторых сигналов. Результаты подтвердили его эффективность. Ниже приведены некоторые из них.

*Пример 2.* В качестве анализируемого сигнала  $x_1[n]$  взята последовательность из  $N = 30$  отсчетов суммы аддитивного шума с исходным сигналом  $\bar{x}_1[n]$ ,

состоящим из 7 гармоник с параметрами из табл.2. В качестве шума взят отрезок нормального процесса с параметрами  $a=0$ ;  $\sigma = 1$ . На рис.5 изображен  $\bar{x}_1[n]$ . Расстояния между частотами сигнала такие, что имеются 5 плотных секторов. Во втором имеются 3 частоты, в остальных по одной. На рис.6 отображены линии спектра исходных гармоник и спектра, рассчитанного по сигналу  $x_1[n]$ , предложенным методом для  $K=7$  и  $K_c = 3$ . Четыре линии спектра исходного и зашумленного сигналов визуально совпали. При большем уровне шума результаты получились менее удовлетворительные.

Таблица 2

Частота $p_k$	амплитуда	Фаза
0	20	0
0.0621	110	0.1
0.1472	120	0.4
0.1623	130	0.8
0.1764	140	1.2
0.3544	150	1.6
0.4265	160	2.0
0.4976	170	2.4

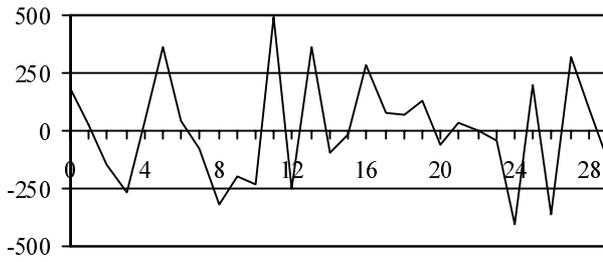


Рис.5. Сигнал  $\bar{x}_1[n]$ .

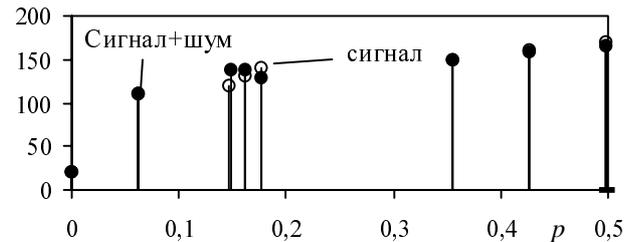


Рис.6. Спектры сигнала  $x_1[n]$ , сигнала+шум  $x_1[n]$ .

*Пример 3.* В качестве составляющих исходного сигнала  $\bar{x}_2[n]$  (рис.7) взяты гармоники с теми же параметрами, кроме 3 и 4 частот, которые более разнятся: 0.2123 и 0.2874. В этом спектре 7 секторов по одной частоте, поскольку расстояния между частотами больше  $1/30$ . То есть размер сектора  $K_c=1$ . Структура сигнала проще, чем в примере 1. Уровень наложенного шума, изображенного на рис.8, значительный:  $a=0$ ;  $\sigma=100$ . На рис.9 изображен суммарный сигнал  $x_2[n]$ . На рис.10 отображены линии спектра шума, исходных гармоник и спектра суммарного сигнала, рассчитанного для тех же параметров  $K=7$ ;  $K_c=3$ . Спектр шума рассчитывался аналитическим параллельным методом для  $K=10$ . При меньших уровнях шума спектр сигнала получился еще точнее.

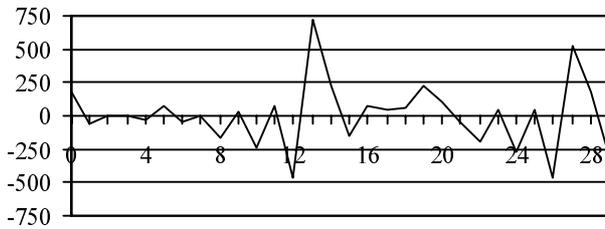


Рис.7. Сигнал  $\bar{x}_2[n]$ .

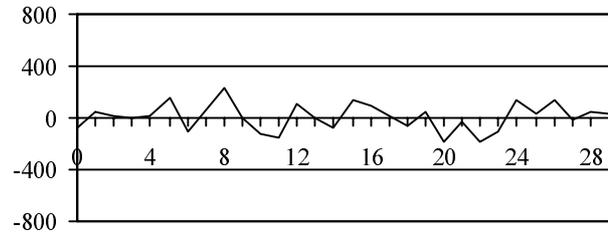


Рис.8. Шум.

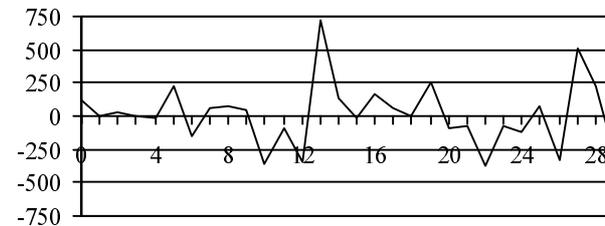


Рис.9. Сигнал+шум  $x_2[n]$ .

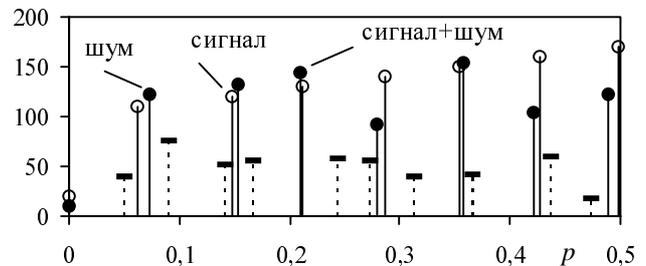


Рис.10. Спектры шума, сигнала  $\bar{x}_2[n]$ , сигнала+шум  $x_2[n]$ .

Предложенные в статье новые способы аппроксимации, новые спектры процессов и методы их расчета могут быть использованы во многих приложениях при анализе и синтезе сигналов и процессов различного назначения.

Применение полных и частичных естественных спектров коротких процессов должно быть не менее полезным, чем спектров на основе разложений Фурье.

#### Литература

1. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1990, гл. 11.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.