

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЕСТЕСТВЕННОГО ЛИНЕЙЧАТОГО СПЕКТРА И ТРЕНДА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Дмитриев Е.В. kvjsj3903@yandex.ru

Излагается способ аналитического расчета спектра и нелинейного тренда дискретного по времени процесса. Способ основан на представлении его суммой степенного полинома и набора синусоидальных членов, использовании их свойств и применении метода наименьших квадратов для нахождения параметров.

При решении задач, связанных с обработкой экспериментальных данных, возникает необходимость анализа породивших эти данные временных процессов. Таковой при решении некоторых динамических задач в технике является проблема спектрального анализа и оценки развития (прогноза) волновых процессов, содержащих аperiodическую компоненту. Это актуально при исследовании нестационарных процессов, например, в радиотехнике при обработке сигналов звуковой, ультразвуковой и радио частот, при анализе сейсмограмм, оценке метеорологических и других природных явлений.

Рассматривается частный случай, когда анализируемый процесс $x(t)$ (или короткий сигнал, некоторая функция) является суммой K синусоидальных компонент и нелинейного тренда - алгебраического многочлена степени M и задан N равноотстоящими отсчетами x_0, x_1, \dots, x_{N-1} .

$$x_n = \sum_{k=1}^K (A_k \cos \omega_k n\Delta t + B_k \sin \omega_k n\Delta t) + \sum_{m=0}^M Q_m (n\Delta t)^m, \quad (1)$$

где A_k, B_k - квадратурные составляющие амплитуды k -й гармоники. Для упрощения полагаем, что шаг между отсчетами сформированного дискретного процесса $\{x_n\}$ $\Delta t=1$. Для $\Delta t \neq 1$ излагаемые ниже рассуждения аналогичны. Ставится задача по определению $3K+M+1$ параметров процесса $\{x_n\}$: квадратурных амплитуд и частот периодических составляющих и коэффициентов многочлена:

$$(A_1, B_1, \omega_1), (A_2, B_2, \omega_2), \dots, (A_K, B_K, \omega_K), Q_0, Q_1, \dots, Q_M. \quad (2)$$

Ее решение позволит осуществлять в частности обнаружение, различение (разрешение) и измерение параметров составляющих дискретного процесса, расчет его значений между отсчетами (интерполяцию) и за пределами отсчетов (экстраполяцию, прогнозирование).

Существуют способы определения спектра волнового процесса, не имеющего аperiodической составляющей, основанные на представлении дискретизированного процесса в виде первого слагаемого суммы (1). Они позволяют точно определить параметры составляющих процесса, среди которых только синусоидальные, если их количество такое, что $3K \leq N$. Для краткости будем называть их гармониками, хотя они могут быть и неортогональными. Получаемый набор параметров: значения частот и амплитуд гармоник процесса назовем *естественным спектром процесса*. Он принципиально отличается от спектров, определяемых с помощью преобразований Фурье, в которых частоты спектра (сплошного или линейчатого) априорно фиксированы (заданы). Один из эффективных способов расчета естественного спектра основан на обобщенном методе Прони [1, п.20.6-6]. С другой стороны любой дискретный процесс может быть однозначно описан коэффициентами аппроксимирующего его степенного многочлена, такого, что $M+1 \leq N$. Каждый из этих двух методов имеет свою область применения, определяемую используемым базисом векторов – набором функций разложения. В первом случае это синусоидальные компоненты, во втором степенные многочлены.

Совместное использование указанных методов аппроксимации позволяет точно решить поставленную задачу о параметрах процесса (2) с помощью аналитических преобразований следующим способом. Используя свойства тригонометрического многочлена, входящего в (1), составляем специальные соотношения из указанных параметров и подобранных пар отсчетов процесса (имея в виду, что $\Delta t=1$):

$$\begin{aligned} x_{i+j} - \sum_{m=0}^M Q_m (i+j)^m + x_{2K+i-j} - \sum_{m=0}^M Q_m (2K+i-j)^m = \\ = 2 \sum_{k=1}^K [A_k \cos \omega_k (K+i) + B_k \sin \omega_k (K+i)] \cos \omega_k (K-j), \end{aligned} \quad (3)$$

где $i=0, 1, 2, \dots, N-2K-1$; $j=0, 1, \dots, K$. При этом применяются несложные преобразования $\cos \omega_k (i+j) + \cos \omega_k (2K+i-j) = 2 \cos \omega_k (K+i) \cos \omega_k (K-j)$;

$$\sin\omega_k(i+j) + \sin\omega_k(2K+i-j) = 2\sin\omega_k(K+i) \cos\omega_k(K-j).$$

Далее, для каждого значения i из соотношений (3), взятых для всех j , составляется система уравнений

$$\begin{aligned} x_i + x_{2K+i} - \sum_{m=0}^M Q_m(i)^m - \sum_{m=0}^M Q_m(2K+i)^m &= 2 \sum_{k=1}^K b_{ik} \cos \omega_k(K); \\ x_{i+1} + x_{2K+i-1} - \sum_{m=0}^M Q_m(i+1)^m - \sum_{m=0}^M Q_m(2K+i-1)^m &= 2 \sum_{k=1}^K b_{ik} \cos \omega_k(K-1); \\ &\circ \quad \circ \quad \circ \\ x_{i+K} + x_{2K+i-K} - \sum_{m=0}^M Q_m(i+K)^m - \sum_{m=0}^M Q_m(2K+i-K)^m &= 2 \sum_{k=1}^K b_{ik} \cos \omega_k(0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $b_{ik}=A_k \cos \omega_k(K+i)+B_k \sin \omega_k(K+i)$. Каждая из этих систем, число которых $N-2K$, состоит из $K+1$ линейных уравнений. Если $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iK}$ считать неизвестными, количество которых K (при фиксированном i), а множители при них постоянными величинами, то последние можно представить в качестве элементов матрицы системы уравнений. Количество уравнений в системе превышает число неизвестных на единицу. Отсюда следует, что в (4) левые части уравнений и коэффициенты при неизвестных в правых частях – элементы матрицы, взятые по ее столбцам, линейно зависимы. Введем $K+1$ вспомогательных множителей

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, \quad \text{где } \alpha_0 = -1$$

и свяжем ими зависимые элементы в линейные комбинации. Комбинации, для правых частей приравняем нулю, а для левых - значениям условных погрешностей

$$\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-2K-1}. \quad (5)$$

Из полученных линейных комбинаций сформируются две новые системы уравнений

$$\sum_{k=0}^K \alpha_k [x_{i+k} + x_{2K+i-k} - \sum_{m=0}^M Q_m(i+k)^m - \sum_{m=0}^M Q_m(2K+i-k)^m] = \epsilon_i, \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i \cos(K-k)\omega_k = 0, \quad \text{где } i=0,1,\dots,N-2K-1 \quad (7)$$

относительно вспомогательных множителей $\{\alpha_k\}$, коэффициентов полинома $\{Q_m\}$ и неизвестных частот $\{\omega_k\}$. Первая система связывает неизвестные параметры первой и второй групп, которые подлежат оп-ределению на данном этапе. Ее частным случаем является система, приведенная в [1].

Рассмотрим вариант, когда общее число неизвестных (2) меньше количества отсчетов, $3K+M+1 < N$. Тогда в первой системе число уравнений будет больше числа неизвестных, $N-2K > K+M+1$ (число отсчетов процесса больше $3K+M+1$). Поэтому ее решение можно искать методом наименьших квадратов. Для

этого составляется квадратичная форма из ошибок $\epsilon = \sum_{i=0}^{N-2K-1} \epsilon_i^2$, которую надо минимизировать по

параметрам

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, Q_0, Q_1, \dots, Q_M \quad (8)$$

путем приравнивания нулю ее частных производных:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha_j} = 0; \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial Q_l} = 0; \quad j=1,2,\dots,K; \quad l=0,1,\dots,M. \quad (9)$$

Однако система (6) нелинейная, поскольку в ней имеются члены, зависящие от произведения неизвестных α_k и Q_m . Поэтому и система (9) будет также нелинейная, решить ее аналитически затруднительно. Но возможно преобразование (6) в более простую форму.

Представим (6) разностью двух слагаемых

$$S_1(i) = \sum_{k=0}^K \alpha_k (x_{i+k} + x_{2K+i-k}); \quad S_2(i) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \sum_{m=0}^M Q_m [(i+k)^m + (2K+i-k)^m].$$

Раскрыв биномы и сделав перестановки сумм, получим из второго

$$S_2(i) = \sum_{m=0}^M Q_m \sum_{j=0}^m C_m^j i^j \sum_{k=0}^K [k^{m-j} + (2K-k)^{m-j}] \alpha_k. \quad (10)$$

Имеем в виду, что $0^0=1$. Запишем члены этой формулы с индексами m и j (при фиксированном i)

$$a_{mj}(i) = i^j Q_m C_m^j \sum_{k=0}^K [k^{m-j} + (2K-k)^{m-j}] \alpha_k$$

в треугольную таблицу, в которой m -е строки и j -е столбцы. Просуммировав члены каждого столбца таблицы без множителей i^j (постоянных для каждого столбца), получим выражения для сумм:

$$q_j = \sum_{m=j}^M Q_m C_m^j \sum_{k=0}^K [k^{m-j} + (2K-k)^{m-j}] \alpha_k, \quad j=0,1,\dots,M. \quad (11)$$

Это есть преобразование неизвестных параметров Q_0, Q_1, \dots, Q_M аperiodической составляющей в новые q_0, q_1, \dots, q_M путем объединения с $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$. Осуществив перегруппировку членов в (10), и произведя указанную замену, вместо (6) получим более простую систему

$$\sum_{k=0}^K \alpha_k (x_{i+k} + x_{2K+i-k}) - \sum_{m=0}^M i^m q_m = \varepsilon_i; \quad i=0,1,\dots,N-2K-1. \quad (12)$$

Это есть система $N-2K$ линейных уравнений относительно новой группы неизвестных

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K, q_0, q_1, \dots, q_M. \quad (13)$$

Для решения системы из ее уравнений составляем квадратичную форму, которую далее минимизируем по этим параметрам путем приравнивания нулю частных производных, аналогично (9).

Так как согласно (12) выражения для производных будут линейными функциями от искомых параметров, то решению подлежит соответствующая система $K+M+1$ линейных уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^K \sum_{m=0}^{N-2K-1} (x_{m+j} + x_{2K+m-j})(x_{m+i} + x_{2K+m-i}) \alpha_j - \\ & - \sum_{j=0}^M \sum_{m=0}^{N-2K-1} m^j (x_{m+i} + x_{2K+m-i}) q_j = \sum_{m=0}^{N-2K-1} (x_m + x_{2K+m})(x_{m+i} + x_{2K+m-i}), \quad (14) \\ & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_{i+k} + x_{2K+i-k}) i^l \alpha_k - \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^l \sum_{m=0}^M i^m q_m = \sum_{i=0}^{N-2K} (x_i + x_{2K+i}) i^l; \end{aligned}$$

где $i=1,2,\dots,K$ для первой группы уравнений и $l=0,1,\dots,M$ для второй; $\alpha_0 = -1$. Коэффициенты при неизвестных (13) и правые части уравнений системы образуют соответствующую матрицу. Если ее строки $1 < i \leq K$, то в них элементами являются

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{m=0}^{N-2K-1} (x_{m+j} + x_{2K+m-j})(x_{m+i} + x_{2K+m-i}); \quad \text{если } 1 \leq j \leq K; \\ a_{ij} &= - \sum_{m=0}^{N-2K-1} m^{j-K-1} (x_{m+i} + x_{2K+m-i}); \quad \text{если } K+1 \leq j \leq K+1+M; \\ c_i &= \sum_{m=0}^{N-2K-1} (x_m + x_{2K+m})(x_{m+i} + x_{2K+m-i}). \end{aligned}$$

Если же ее строки $K+1 \leq i \leq K+M+1$, то в них элементы

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{m=0}^{N-2K-1} (x_{m+j} + x_{2K+m-j}) m^{i-K-1}; \quad \text{если } 1 \leq j \leq K; \\ a_{ij} &= - \sum_{m=0}^{N-2K-1} m^{i+j-2K-2}; \quad \text{если } K+1 \leq j \leq K+1+M; \\ c_i &= \sum_{m=0}^{N-2K-1} (x_m + x_{2K+m}) m^{i-K-1}. \end{aligned}$$

Решение системы (14) может быть выражено в аналитическом виде с использованием соответствующих определителей матрицы.

Далее, поскольку из (7) следует, что частота каждой гармоники процесса $\{x_n\}$ должна являться корнем соответствующего тригонометрического уравнения степени K , то по найденным параметрам $\{\alpha_k\}$ можно составить общий вид этих уравнений и решить его,

$$\cos K\omega - \sum_{k=1}^K \alpha_k \cos(K-k)\omega = 0.$$

Полученные корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$ принимаются за частоты гармонических составляющих процесса $\{x_n\}$. Следует отметить, что корни необходимо искать как главные значения, то есть в диапазоне $0 \leq \omega \leq 2\pi/\Delta t$ (имея в виду, что $\Delta t=1$). Решение данного уравнения является единственной операцией предлагаемого способа, которая осуществляется численным методом.

Коэффициенты аperiodической составляющей Q_0, Q_1, \dots, Q_M определяются линейной операцией из (11) по найденным параметрам (13). Очевидно, что начинать следует с последнего - Q_M , поскольку каждое младшее Q_m зависит от прежде рассчитанных старших. Из (11) следует

$$\begin{aligned} q_M &= 2Q_M \sum_{k=0}^K \alpha_k; \\ q_{M-1} &= 2Q_{M-1} \sum_{k=0}^K \alpha_k + 2KQ_M C_M^{M-1} \sum_{k=0}^K \alpha_k; \\ q_{M-2} &= 2Q_{M-2} \sum_{k=0}^K \alpha_k + \sum_{m=M-1}^M Q_m C_m^{M-2} \sum_{k=0}^K [k^{m-M+2} + (2K-k)^{m-M+2}] \alpha_k; \\ &\quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ q_j &= 2Q_j \sum_{k=0}^K \alpha_k + \sum_{m=j+1}^M Q_m C_m^j \sum_{k=0}^K [k^{m-j} + (2K-k)^{m-j}] \alpha_k; \\ &\quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ q_0 &= 2Q_0 \sum_{k=0}^K \alpha_k + \sum_{m=1}^M Q_m \sum_{k=0}^K [k^m + (2K-k)^m] \alpha_k. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} Q_M &= q_M \Sigma \alpha; \\ Q_{M-1} &= \{q_{M-1} - 2KQ_M C_M^{M-1} \sum_{k=0}^K \alpha_k\} \Sigma(\alpha); \\ Q_{M-2} &= \{q_{M-2} - \sum_{m=M-1}^M Q_m C_m^{M-2} \sum_{k=0}^K [k^{m-M+2} + (2K-k)^{m-M+2}] \alpha_k\} \Sigma(\alpha); \\ &\quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ Q_j &= \{q_j - \sum_{m=j+1}^M Q_m C_m^j \sum_{k=0}^K [k^{m-j} + (2K-k)^{m-j}] \alpha_k\} \Sigma(\alpha); \\ &\quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ Q_0 &= \{q_0 - \sum_{m=1}^M Q_m C_m^0 \sum_{k=0}^K [k^m + (2K-k)^m] \alpha_k\} \Sigma(\alpha), \end{aligned}$$

где $\Sigma(\alpha) = 1/(2 \sum_{k=0}^K \alpha_k)$.

Далее, квадратурные составляющие $\{A_k, B_k\}$ амплитуд найденных частотных линий из (2) определяются также с использованием метода наименьших квадратов. Для этого минимизируется условная ошибка аппроксимации

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left[x_n - \sum_{m=0}^M Q_m n^m - \sum_{k=1}^K (A_k \cos \omega_k n + B_k \sin \omega_k n) \right]^2 \quad (15)$$

по каждому параметру из $\{A_k, B_k\}$ с учетом найденных частот $\{\omega_k\}$ и коэффициентов $\{Q_m\}$. Минимизация заключается в решении системы линейных уравнений, составленной взятием производных от (15) по искомым параметрам. Решение этой системы также может быть записано в аналитическом виде через определители.

В частном случае, при $M=2$, то есть когда тренд (апериодическая составляющая) процесса имеет форму параболы, из (11) получаем

$$q_0 = 2[Q_0 + Q_1(K-1) + Q_2(2K^2 - 2K + 1)] \sum_{k=0}^K \alpha_k + 2Q_2 \sum_{k=0}^K (k^2 - 2Kk) \alpha_k ;$$

$$q_1 = 2[Q_1 + 2Q_2(K-1)] \sum_{k=0}^K \alpha_k ; \quad q_2 = 2Q_2 \sum_{k=0}^K \alpha_k .$$

И вместо (14) имеем систему линейных уравнений относительно $K+3$ неизвестных (13)

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_{i+k} + x_{2K+i-k}) \alpha_k - q_0(N-2K) - q_1 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i - q_2 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^2 = \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_i + x_{2K+i});$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_{i+k} + x_{2K+i-k}) i \alpha_k - q_0 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i - q_1 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^2 - q_2 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^3 = \sum_{i=0}^{N-2K-1} i(x_i + x_{2K+i});$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_{i+k} + x_{2K+i-k}) i^2 \alpha_k - q_0 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^2 - q_1 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^3 - q_2 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^4 = \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^2(x_i + x_{2K+i});$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_{i+k} + x_{2K+i-k})(x_{i+j} + x_{2K+i-j}) \alpha_k - q_0 \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_{i+j} + x_{2K+i-j}) -$$

$$- q_1 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i(x_{i+j} + x_{2K+i-j}) - q_2 \sum_{i=0}^{N-2K-1} i^2(x_{i+j} + x_{2K+i-j}) = \sum_{i=0}^{N-2K-1} (x_i + x_{2K+i})(x_{i+j} + x_{2K+i-j})$$

где $j=1,2,\dots,K$.

Если размер выборки процесса $N=3K+M+1$, то количество исходных данных совпадает с числом неизвестных (2). Тогда общая задача упрощается и вместо системы (14) непосредственно решается (12), состоящая из $3K+M+1$ линейных уравнений относительно тех же неизвестных (13). В этом случае все значения ошибок (5) сразу полагаются равными 0. Дальнейший алгоритм вычислений аналогичен изложенному выше.

Расчеты примеров по программе для ЭВМ, составленной по предложенному методу определения параметров естественного спектра и тренда процесса, подтверждают правильность алгоритма и аналитических преобразований. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации дискретных процессов суммой (2) для $N=20$ составляла 10^{-12} .

Если анализу подлежит непрерывная (аналоговая) функция $x(t)$, то изложенный метод также можно использовать. Для этого необходимо предварительно дискретизовать процесс с шагом Δt , не большим $2\pi/\omega_{\max}$, где ω_{\max} — максимальная частота составляющих гармоник процесса.

Литература.

1. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, М., 1973.